0.1 Generatore di numeri casuali

Scrivere un codice che implementi un generatore lineare congruenziale e testarne il funzionamento con il test del chi-quadro di Pearson.

0.2 Oscillatore armonico quantistico: approccio variazionale

Consideriamo l'operatore hamiltoniano unidimensionale:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \frac{1}{2}x^2 \tag{1}$$

e una famiglia di funzioni d'onda di prova:

$$\psi_\beta(x) = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\beta x^2\right) \tag{2}$$

al variare del parametro $\beta > 0$.
Calcolare con un metodo Monte Carlo i seguenti integrali, al variare di β nell'insieme $\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$:

$$< V >= \int_{\mathbb{R}} dx V(x)\psi_\beta^2(x) \tag{3}$$

$$< T >= \int_{\mathbb{R}} dx \psi_\beta(x) \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi_\beta(x)\right) = \int_{\mathbb{R}} dx \left\{-\frac{1}{2}\left[(2\beta x)^2 - 2\beta\right]\right\} \psi_\beta^2(x) \tag{4}$$

$$< H >= \int_{\mathbb{R}} dx \left\{-\frac{1}{2}\left[(2\beta x)^2 - 2\beta\right] + V(x)\right\} \psi_\beta^2(x) \tag{5}$$

Lo schema da utilizzare é il seguente:

1. fissare un valore di β;

2. osservare che tutti gli integrali hanno la forma:

$$I = \int_{\mathbb{R}} dx f(x) p(x) \tag{6}$$

3. Generare n punti $\{x_1, \dots, x_n\}$ campionando $p(x)$ e valutare:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{7}$$

   Sappiamo che $\mathcal{I}$, per n abbastanza grande, é una realizzazione di una normale con media I. Sapreste dire quanto vale la varianza?

4. Ripetere il punto precedente N volte, ottenendo N dati $\{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_N\}$. Stimare un intervallo di confidenza per I al livello 95%.

5. Passare al valore successivo di β.

Completare lo studio fatto stimando, per ogni valore di aspettazione I, la varianza:

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} dx f^2(x)p(x) - \left(\int_{\mathbb{R}} dx f(x)p(x)\right)^2 \tag{8}$$

al variare di β. Che interpretazione fisica ha σ^2? Cosa vedete di speciale nel caso $\beta = \frac{1}{2}$?